Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1984

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mardi 8 Mai 1984, de 14 heures à 18 heures

Dans ce probleme, on dira qu'une fonction numérique f possède un développement asymptotique à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ si :

1°) f est définie sur un intervalle du type $]\alpha, +\infty[\subset \mathbb{R}^+$

2°) il existe n+1 nombres réels : $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n$ et une fonction ε_n, avec $\lim_{x \to +\infty} \varepsilon_n(x) = 0$, tels que :

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1/x + \ldots + a_i/x^i + \ldots + a_n/x^n + (1/x^n)\,\varepsilon_n(x).$$

La formule (1) s'appelle développement asymptotique de f, à l'ordre n, au voisinage de $+\infty$.

On pose $S_n(x) = a_0 + a_1/x + \ldots + a_i/x^i + \ldots + a_n/x^n$; on l'appellera partie régulière à l'ordre n du développement asymptotique de f

On définit de même un développement asymptotique à l'ordre n au voisinage de $-\infty$

PARTIE I

1°) Démontrer que si f admet un développement asymptotique à l'ordre n, au voisinage de $+\infty$, celui-ci est unique.

2°) Démontrer que si f admet un développement asymptotique à l'ordre n, au voisinage de $+\infty$, il en est de même pour la fonction g définie par : $g(x) = f(x) + e^{-bx}$ (b>o donné),

3°) Soit α un réel fixé, et soit $E_{\alpha,n}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $]\alpha, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant un développement asymptotique à l'ordre n au voisinage de $+\infty$

a) Montrer que pour les opérations usuelles $E_{\alpha,n}$ possède d'une part une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, d'autre part une structure d'anneau commutatif unitaire.

b) Comment obtient-on la partie régulière du développement asymptotique du produit de deux fonctions de $E_{\alpha,n}$?

4°) a) Montrer que pour tout x strictement positif on a :

$$\operatorname{Arctg} x = \pi/2 - \operatorname{Arctg} 1/x$$

b) Déterminer le développement asymptotique à l'ordre 2n+1, au voisinage de $+\infty$ de la fonction

$$x \longrightarrow \operatorname{Arctg} x$$

c) Quel est le développement asymptotique à l'ordre 2n+1 au voisinage de $-\infty$ de la fonction

$$x \longrightarrow \operatorname{Arctg} x \ ?$$

PARTIE II

Soient θ et K les fonctions de la variable réelle x définies par :

$$\theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \qquad \text{et} \quad K(x) = 1 - \theta(x)$$

1°) a) montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$K(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

b) en déduire que pour x>0 :

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^{+\infty} u^{-1/2} e^{-u} du$$

.../...

I P 230 I

2°) On considère l'intégrale :

$$I_n(x) = \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{(2n+1)/2}}\,du \qquad \text{où } n \in \mathbb{N} \qquad \text{et } x \in \mathbb{R}^*$$

a) Prouver que quel que soit n, $I_n(x)$ est convergente.

b) Etablir la relation de recurrence :

$$I_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2} \cdot I_{n+1}(x)$$

c) démontrer que pour $n \geq 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2} I_n(x) = 0$$

3°) Déduire de ce qui précède le développement asymptotique à l'ordre $2n + 1$ de : $e^{x^2} K(x)$, au voisinage de $+\infty$

4°) Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Laplace-Gauss centrée-réduite, et soit F sa fonction de répartition.

a) établir la relation :

$$2F(x) = 1 + \theta\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

b) en déduire que $F(x) = 1 - e^{-x^2/2} \cdot H(x)$ où H est une fonction dont on donnera le développement asymptotique à l'ordre 2n+1 au voisinage de $+\infty$.
